上越数学教育研究，第32号，上越教育大学数学教室，2017年，pp.19-32

高等学校数学Ⅱ「微分・積分の考え」における「微分すること」・「積分すること」の意味理解に関する研究 ―極限の考えの理解過程に着目して―

片寄　恵理奈
上越教育大学大学院修士課程 3 年

1. はじめに

微積分の学習において，計算はできるが，その意味はわからないまま，という状況は少なくない。微積分指導の現状に対して，次のような指摘がある。大田(2009)は次のように述べている。

「概念を教えないまま計算の仕方だけを教える数学教育は，「公式を覚えて問題を解く科目である」という誤った数学観を形成してしまう。暗記主義の教育を受けて大学生になったものがそのまま教師になって暗記主義の教育をしているという状況すら生まれている。」(大田，2009，p.22)

微積分の意味理解を伴わない指導の問題点が指摘されている。これに関わり，塚原(2002)は，極限の扱いについて，次のように述べている。

「高等学校における数学Ⅱの微分積分法は，極限の概念は微分積分法の理論の根幹をなす重要な概念であるにもかかわらず，その扱い方は指導上の困難点の一つである。(略) 極限に関わる問題提起とその根拠，及び速度，接線，極値，面積を求める際の着想と方法を提示することにより，極限の考えが生まれるその背景を理解させることが，極限の概念理解のための一つの方法であると考える。」(塚原，2002，p.106)

微積分の意味理解には極限の概念理解が重要であることを指摘している。

一昨年，高等学校普通科の第 2 学年の生徒で微積分学習の既習者三十数名を対象に，微積分学習に関するアンケートを行った。その中に，「「微分すること」・「積分すること」の意味を詳しく説明してください」と問う設問がある。この設問に対して，生徒の回答は，「微分は次数を下げることで計算をしやすくし，積分は微分したことで得られた解を微分する前に戻すことができる」，「微分は文字の次数を減らす，積分は面積を求める」など，それらと同様の回答が殆どであった。これらの回答は，生徒が数学Ⅱ「微分・積分の考え」において，「微分は次数を下げること，積分は微分の逆であること」という結果のみを覚えているだけであって，「微分すること」・「積分すること」の意味は不十分なものである。この意味理解には極限の考えが必要であることは言うまでもない。

これらの指摘が筆者の課題意識につながり，数学Ⅱ「微分・積分の考え」における

「微分すること」・「積分すること」の意味理解に関して，極限の考えの理解過程に着目して研究を行うこととした。

本研究は，高等学校数学Ⅱの単元「微分・積分の考え」全体に亘る指導改善を行おうとする取り組みの一環である。数学Ⅱ「微分・積分の考え」の指導における極限の考えと意味理解に着目し，微積分学習において意味を伴った活動を繋いでいき,「微分すること」・「積分すること」の意味理解に到達できる指導への改善を示すことを目的としている。

2. 現在の数学Ⅱ「微分・積分の考え」の学習上と困難と指導の問題点

数学Ⅱ「微分・積分の考え」までの素地指導で形成される極限の考えや数学Ⅲ「極限」の指導において形成される極限の考えと比較し，数学Ⅱ「微分・積分の考え」における概念的操作を通して得られる極限の考えを明らかにしていく。

2.1. 数学Ⅱ「微分・積分の考え」における極限の考え

2.1.1. 数学Ⅱ「微分・積分の考え」までの極限の考えの素地指導

数学Ⅱ「微分・積分の考え」までの極限の素地指導として坂井(2015)や大塚(2009)を取り上げる。坂井(2015)は，極限の考えの素地について以下のように述べている。

「小学校算数や中学校数学においては，極限が内在する学習内容を通して，一定の数値に収束するという極限の考えの素地を育むことが，小学校高学年から中学校の段階における連続性に基づいた指導内容として重要であると考えられる。」（坂井，2015，p.5）

ここでは，極限の考えが小学校算数や中学校数学の学習にも見られると指摘している。大塚(2009)では，平均の速さから瞬間の速さを考える過程について以下のように述べている。

「変化の割合がxの変域によって違うことを理解する学習(習得)，xを時間，yを距離とし，平均の速さを求めることで変化の割合を捉え直していく学習(活用)，平均の速さの変域を縮めていくことで瞬間の速さを求めていく学習(探求)を仕組んでみた。」(大塚，2009，p.60)

ここでは，変化の割合が一定ではないということから，平均の速さの変域を縮めていく学習を通して，数学Ⅱ「微分の考え」で扱う極限概念の素地ができると考えられる。

2.1.2. 数学Ⅲ「極限」において獲得される極限の考え

平成 21 年度の高等学校学習指導要領解説数学編理数編では，高等学校第 3 学年における数学Ⅲ「極限」において，数学Ⅱ「微分の考え」で学習した極限の理解に重点を置きながら新たに数列の極限を学習する。このとき，極限の理解については，極限の直観的な理解までにとどめられている。

次に，高等学校数学Ⅲ「極限」における極限の指導について，詳説数学Ⅲ(啓林館，2013)を取り上げることにする。

極限の学習は数列の極限と関数の極限とに分かれており，∞の極限について考える指導がされている．数列$\{a_n\}$を考えたとき，nを限りなく大きくしていくときの一般項a_nの値を考えさせて∞についての極限を学習する。ゆえに, 数学Ⅲ「極限」の「$n \to \infty$」という数列の極限において「任意のnを限りなく大きくするとき，0 に限りなく近づく」という意味の極限を学習する。

2.2. 数学Ⅱ「微分・積分の考え」における極限の扱い

2.2.1. 数学Ⅱ「微分・積分の考え」における代数的操作としての極限

代数的操作としての極限の扱いについて明確にするため，高等学校数学Ⅱの教科書の詳説数学Ⅱ(啓林館，2013)を取り上げる。

この教科書では，微分係数$f'(a)$を求める操作がaに値を代入すると記述されており，代数的操作を行っていると考えられる。

2.2.2. 数学Ⅱ「微分・積分の考え」における概念的操作としての極限

次に概念的操作としての極限の扱いについて明確にするために，上記と同じく詳説数学Ⅱ(啓林館，2013)を取り上げることにする。

ここでは，一般の関数の平均変化率や微分係数を導入するための準備として，斜面を転がる球の運動の平均の速さを考えさせる。この学習を通して，生徒はh の値に 0 を代入するのではなく限りなく 0 に近い値を考えることで瞬間の速さについて考えることになる。このときに，数学Ⅱ「微分の考え」で獲得される極限概念を生徒に意識させることができると考える。

2.3. 数学Ⅱ「微分・積分の考え」において獲得される極限の考えを育む概念的操作

瞬間の速さでは，hが限りなく 0 に近づく($h \to 0$)という操作を具体的な事象をもとに生徒に考えさせている。瞬間の速さという事象も日常とつながりのあるものであり，実体験できる対象であるため，代数的な操作になりにくいと考えられる。

次節では，数学史にみられる極限の考えの形成過程を踏まえた上で，数学Ⅱ「微分・積分の考え」において生徒が極限の考えを形成する学習上の困難と指導上の問題点を述べる。

3. 歴史的視点からみる極限の考え

3.1. 塚原久美子(2002)の 4 つの課題からみる極限に関する指導の困難性

塚原(2002)は「17 世紀における微分積分の法の誕生の動機は，次の四つ課題①瞬間速度を求めること②接線を求めること③最大値・最小値を求めること④曲線で囲まれた部分の面積を求めることの解決であると言える。」(p. 108)と述べている。これらは微分積分の単元においても，基礎・基本であるとし，授業の流れの構造図を次のように考えている。

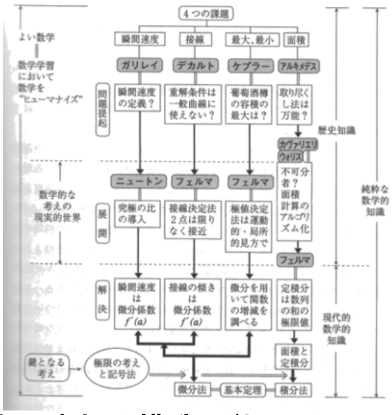


図 1:授業の流れの構造図(塚原, 2002, p.137)

ここでは，4 つの課題の内，瞬間速度の流れについてカギとなる考え，すなわち極限の考えに焦点を当ててみていきたい。

3.2. ガリレイとニュートンにみる極限の概念

ガリレイは自由落下運動について数学的に証明を行う際に，発展的な問題として平均の速さから瞬間の速さを考えるアプロー

チを問題として考え，その問題を解決するために「極限の考え」を用いており，ごく直観的な「極限の考え」を考えたとされる。その後，ニュートンはガリレイの問題提起を受けて，一つの数学的モデルとして「究極の比」を考え，その方法として流率法を生み出した。塚原(2002)はガリレイとニュートンの研究を次の図のようにまとめている。

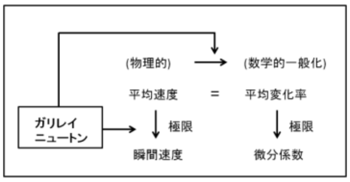


図 2:瞬間の速さと微分係数の概念の構造化 (塚原, 2002, p.141)

3.3. デカルトとフェルマにおける極限の概念

塚原(2002)は,「ギリシャの初等幾何学では，幾何学的曲線として認知されていたのは,直線と円だけであった」と述べており，この図形の性質は数学Ⅱ「図形と方程式」で学習する。

デカルトの方法では，放物線でも円の接線を求める方法と同じく一点を共有することで機械的に処理できるとしている。しかしフェルマの方法は，デカルトとは異なり曲線上にある 2 点を限りなく近づけていくことで直線を捉えようとしたものである。

デカルトは円以外の曲線における機械的に接線を求める方法を確立したが，そこに極限の考えは用いられていなかった。デカルトの方法をさらに一般的な方法へと転換したのが，フェルマの方法である。ここで 2 点 P，Q が限りなく近づいていくことで直線となる発想が生まれたのである。

数学史における極限の概念形成を参考にして,次に極限の考えを含む「瞬間の速さ」･「微分係数の図形的意味(接線)」・「面積と定積分」の学習におけるそれぞれの極限の考えを捉えるために，生徒の意味理解の様相を構想し理解過程を明らかにしていく。

4. 極限の考えの意味理解を促す学習指導案の作成

調査授業の概要について述べる。

【調査研究の概要】

・単元：数学Ⅱ「微分・積分の考え」
・対象：福島県 S 高等学校　文系クラス
　　第 2 学年 1 組　8 名
　　第 2 学年 2 組　25 名
・実際の調査授業の日程等

平成 27 年 9 月
　14 日(月)：瞬間の速さの授業
　16 日(水)：微分係数と接線の授業
　17 日(木)：曲線の概形についての授業
　18 日(金)：定積分の授業

上記に示した通り，対象を高等学校第 2 学年として調査授業は単元「微分・積分の考え」で行った。調査授業は，考案した学習指導案を基に全 4 時間(2 クラス合計 8 時間)で実施した。

調査授業の方法は，高等学校数学Ⅱの教科書を概観し，この単元の学習の流れについて考察することで，それぞれの学習での理解過程を構想する。次に「瞬間の速さ」,「微分係数の図形的意味(接線)」,「面積」の学習における生徒の「微分すること」･「積分すること」の変容が実際の授業で見られるか明らかにするために，学習指導案を作成する。授業者は当クラスの数学教科担当の教師であり，作成した学習指導案をもとに授業を実施するというものである。

5. 微積分学習における極限の考えの理解過程

ここでは，設計した授業をもとに行われた調査授業の実際を述べ，生徒の思考がどのように変容し，それに伴い活動がどのように変容し，数学Ⅱ「微分・積分の考え」に関わる意味理解に結びついたのかを分析し考察する。

5.1. 瞬間の速さの学習について

5.1.1. 瞬間の速さの学習における極限の考え

瞬間の速さは，山口昌広(2014)の調査授業を用いて考察を行った。この調査授業では，瞬間の速さの時間幅を生徒に考えさせており，生徒は以下のように答えている。

s5	時間の幅は, あっいや, 変わらない？
s3	狭くなってる。
s6	少なくなってる。

(山口昌広，2014)

このように生徒によっては瞬間の速さの時間幅についての捉え方に差異がみられた。このことから瞬間の速さを理解していくにはいくつかの過程があると考えられた。下記の表 1 は瞬間の速さの時間幅を 0 と考えられない生徒の理解過程である。

表 1　調査授業にみられた瞬間の速さの理解段階

①　速さは全て，距離を時間で割ることで求められると考えている
②　瞬間の速さと平均の速さを混同して考えている
③　どのような状態の速さにあたるのか考える
④　瞬間の速さの時間幅がどうなっているか考える
⑤　瞬間の速さの時間幅を 0 と考えることができない
⑥　瞬間の速さは，時間幅を小さくしていけば求められるのではないかと考える
⑦　瞬間の速さを，時間幅を限りなく 0 に近づけていくことにより，求めることができると考える

下記の表 2 は生徒が瞬間の速さの時間幅を 0 と考えた場合の理解過程について，筆者が考察したものである。

表 2　調査授業を受けて考えられる瞬間の速さの理解段階

①　速さは全て，距離を時間で割ることで求められると考えている
②　瞬間の速さの時間幅は 0 であると考える
③　瞬間の速さは，0 で割れば求められるのではないかと考える
④　瞬間の速さは，0 で割ることでは求めることができない
⑤　瞬間の速さは，時間幅を小さくしていけば求められるのではないかと考える
⑥　瞬間の速さを，時間幅を限りなく 0 に近づけていくことにより，求めることができると考える

山口昌広(2014)の調査授業では表 1 のように瞬間の速さの時間幅を 0 であると考えることはできなかったが，時間幅を 0 に限りなく近い値にして，瞬間の速さを求めようとする生徒の様子が明らかになった。

5.1.2. 瞬間の速さの学習における極限の考え

5.1.1 において考察した「瞬間の速さ」における生徒の理解過程で，瞬間の速さの時間幅を 0 と考えるか考えないかに分岐するのではないかと考え，これらの理解過程を調査授業で実施し検証した。

調査授業のここでの目的は，斜面を転がる球の運動を実際に生徒に見せて,「瞬間の

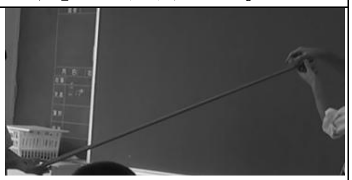
速さの時間幅はどうなっているか」と投げかけることで，生徒の瞬間の速さにおける意味理解の過程を明らかにすることである。

下の表 3 は瞬間の速さの授業の場面ごとに①～⑥の番号で区切りをつけている。s1, s2 などは生徒個人を表わしており，それ以外で生徒とだけ表記されている場合は生徒全員であることを表している。

表 3　瞬間の速さにおける生徒の理解過程

① 1 学期の間に学習した微分についてプリントを用いて復習する。このとき,「なんで平均のって言葉がついているの？」と投げかけられたので s1 は「1 秒後と 2 秒後のときでは速さが違うから，真ん中の平均のってつけた」と回答し，それを受けて教師は「速さっていうのは色んな種類があるんです。そうなっちゃうと平均の速さを出すしかないので平均の速さってことです」と説明した。

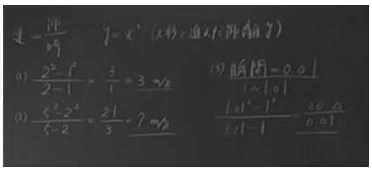
② 「1 秒後から 2 秒後までの速さが全部同じって考えているかもしれません。そこでちょっと実験ね」と言い，教師は右図のように竹竿を傾けて坂を作り，ボールを転がす実験を行った。その後「1 秒後から 2 秒後までの平均の速さはどのようにして求めますか」と投げかけられたので, s3 は「距離÷時間」と答えた。



③ 次に教師は「瞬間の速さとはどんなものか」と投げかけた後，右図のように竹竿を傾けて坂を作り，瞬間を白い板同士の隙間で表してボールを転がす実験を行った。この実験で瞬間の速さが坂の頂点と下で速さが違うことが分かった。

④ 「この計算で瞬間の速さを捉えようとしたら，どんな計算になるか。s5 の感覚でボールがひゅっと通った感覚は何秒くらいだと思う？」と投げかけられたので，s5 は「0.04 くらい，いや 0.000…」と答えた。次に「じゃあ s5 の思う瞬間を 0.01 としよう。そしてスタートを 1 秒から 1.01 秒までを瞬間の速さとしよう。そうすると，どんな計算になる？」と聞かれたので，s5 は「1．01-1」と答えた。更に「1．01-1 分の？」と聞かれたので，s5 は「1.01^2-1^2」と答えた。

s5 が答えた式を右図のように黒板に板書しながら「これが瞬間の速さですって言っていいですか？」と投げかけられたので，s5 は「違うと思います」と答えた。



⑤ 「そうだね，違うよね。じゃあこの瞬間をもっと小さくしたら ok ですか？」と投げかけられたので，s1 は首を傾げながら「だめだと思う」と答えた。教師に「(瞬間の速さは) どんな量だと思う？」と投げかけられたので，s3 は「存在するんでしょうけど，ちっちゃすぎてよく分かんないくらいちっちゃい」と答えた。黒板に【存在するけど小さい】と板書された後,「s2 はどう？」と投げかけられたので，s2 は「いっそ存在しないと」と答えた。それに対して「存在しないって言うのを数字でいうと？」と投げかけられたので，s2 は「0 です」と答えた。

⑥ 「存在しないのは 0 ですよね。そうすると，分母が 0 っていうと？」と平均の速さの式を指しながら問いかけられたので，s7 は「ないです」と答えた。次に「瞬間ていうのがなんだかよく分からないから，この瞬間をよくhっておくよね。そうすると，2 秒から 2+hまでの何を求めてる？」と投げかけられたので，s4 は「あ，平均の速さ」と気付いたように声を上げて答えた。

黒板に板書された【2 秒から 2+hまでの平均

の速さ】を見ながら，「hを限りなく 0 に近づけます。限りなく 0 に近づけるっていうのを lim と置きます。これを 2 秒後の瞬間の速さです」という教師の説明を受けて，s1 は「瞬間の速さは特定距離間までの平均の速さに等しい」と理解した。

この理解過程では，生徒の多くは瞬間の速さの時間幅を 0 と考えることができなかったが，教師の働きかけで時間幅を 0 と考えた時，0 で割ることができないことに気付くことはできたようである。その上で，極限の考えである「0 ではない値をとりながら，限りなく 0 に近づけていく」ことを生徒に意識させることができることを明らかにした。

5.2. 微分係数の図形的意味(接線)の学習について

5.2.1. 微分係数の図形的意味(接線)の学習における極限の考え

微分係数の図形的意味(接線)は，啓林館の詳説数学Ⅱの教科書を用いて考察を行った。ここでは，関数y　　　)のグラフ上にある点 A を点 B に近づける(A)とき，直線 AB がどう変化するか考え(B)，また，その直線 AB に近づく直線があると気付き，最終的に生徒の理解が直線 AB に「近づく直線」が微分係数であることに気付くことで，「近づく直線」が接線の傾きも表すことに気付くと考えられる生徒の理解過程を明らかにした。

(A)
(B)

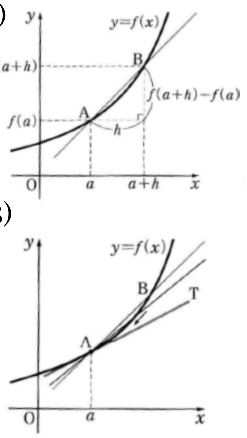


図 3:教科書の指導 (啓林館, 2013, p.198)

これを受けて生徒の理解過程を考察すると以下のようになると考えられる。

表 4　教科書にみられた微分係数の図形的意味(接線)の理解過程

①　微分係数　　――――　の中にある ――――　が何であるかを確認する
②　①で確認した平均変化率がグラフにおいてはどの図形で表されるのかを考える
③　②で考えた図形が図 3 の(A)にある直線 AB であることを確認する
④　　　，すなわちhを限りなく 0 に近づけるということは図 3 の(B)においてどのような図形的意味を持つのかを考える
⑤　④で考えた　　　の図形的意味は，点 A を点 B に限りなく近づけることを確認する
⑥　点 A を点 B に限りなく近づけるとき，直線 AB はどのように変化するかを考える
⑦　⑥で直線 AB の変化を考えていく中で，直線 AB が近づく直線があることに気付く
⑧　⑦でその存在に気づいた「近づく直線」（接線）の傾きが，①の微分係数の図形的意味であると認める

生徒はこのような過程を経て微分係数の図形的意味(接線)を学習していく。数学Ⅱ「図形と方程式」で学習する円の接線は，判別式により決定することができるが，数学Ⅱ「微分・積分の考え」で扱われる円以外の曲線はその限りではない。

5.2.2. 「微分係数の図形的意味(接線)」における調査授業の実践と分析

5.2.1 では，学習指導要領や教科書を用いて微分係数の図形的意味(接線)における生徒の理解過程を考察してきた。その結果，微分係数や接線で極限を扱い導関数の応用として接線の傾きを学習し，微分係数は接

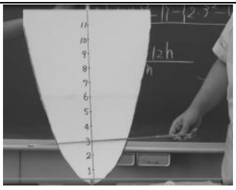
線の傾きを表すことを図とともに視覚的に理解させる学習を行うようになっている。しかし，数学Ⅱ「図形と方程式」で学習する円の接線は，判別式により決定することができるが，数学Ⅱ「微分・積分の考え」で扱われる円以外の曲線はその限りではない。この認識の差は極限の考えを用いる微分係数の図形的意味(接線)において実際にどのように生徒の理解が進んでいくかみるために調査授業を実施することとした。

調査授業の目的は，平均変化率の極限値が微分係数であり，微分係数が接線の傾きになることを図形的に捉えさせることである。そのため授業ではまず，平均変化率と微分係数の復習を行う。次に関数$f(x$
を用いて，瞬間の速さを図形的に考える活動を通して，平均変化率の極限値が微分係数として求められることを生徒に気付かせ，微分係数が接線の傾きになるだろうと考えるのではないかと想定できる。実際の授業における生徒の理解の様相を次にみていく。

表 5　微分係数の図形的意味(接線)における生徒の理解過程

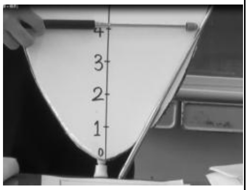
①　1 学期に学習した平均変化率と微分係数の復習をプリントで行った後，「1～2 秒後までの平均の速さを求める時にどんな計算をしたっけ？」という教師の問いかけから，s1 は「$4-1/2-1$」と答えた。「この計算をグラフにするとどうなるのかっていうのを考えて行きたいと思います」という教師の発言から，黒板の板書に従って関数$y=x^2$のグラフをプリントの裏に書いた。

②　右図のように，関数$y=x^2$をプリントの裏に書いた。教師は「この計算てグラフで考えると何の計算だか分かる？」と黒板に板書された式を指差しながら s3 に投げかけた。s3 は「yの増加量$/x$の増加量」と答えると，更に「つまり，これは？」と問いかけられ，「傾き」と答えた。s3 は教師とのやり取りから平均変化率の式がグラフでは傾きを表すと理解し，生徒はプリントのグラフの横に「yの増加量$/x$の増加量 = 傾き」と書いた。

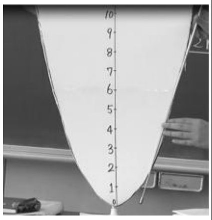


③　「今日はこの道具を使ってね，これをこのグラフで表すとどうなる？」と①の式を指差しながら問いかけられると，s2 は前に出てきて「3 のところ」と言いながら，指示棒を用いて右上図のように$y=3$となるx軸に平行な直線をグラフに表した。「さっき s3 が言ってたのってなんだっけ？」と再度問われると，s2 は「傾き」と答えた。同じやり取りを繰り返していると s2 は「あ，そうか x が 1 から 2」と呟いて(A)の図のようにグラフに表した。次に「じゃあ次に 2 秒から 3 秒までの平均をグラフでやろうとしたらどうなる？」と投げかけられると， s7 に指示棒を渡すと，(B)の図のようにグラフに表した。

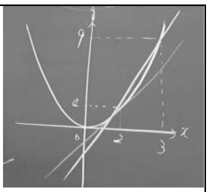
(A)



(B)



それを受けて「前回やった 2 秒後の瞬間の速さって言ったらこのグラフはどうなりますか？」と問いかけられたので， s1 は「2 秒のときの？」と確認し，「普通に($y=$)4 のところに」と言いながら$y=$
上の(2,4)に接するように指示棒を傾けた。「どうしてこうだと思うの？」と問いかけられると，s1 は「さっきの，これ(座標(2,4))とこれ((3,9))が，ここととここでぶつかるから」と答えた。他の生徒は s1 が指示棒を用いてグラフに表した直線をみて理解を示した。



④　「この線っていうのはどういう線？」と聞かれたので，s1 は「$y = x^2$の接線」と答えた。教師が右図のように今までの直線を黒板のグラフに板書したので，板書に従ってプリントに書いた。次に「何で接線になっちゃうんだっけ？」と問いかけられると， s3 は「前に出てもいいですか？」と言い黒板のグラフを指して「さっき求めてた平均の速さがここからここまでの線のグラフだと思ってたんですよ。で，それがちっちゃくなるから，最終的にはここ(2,4)で終わるんじゃないかなって，考えてたんです」と答えた。「ぎゅーっとなって点になっちゃうみたいな？」と教師が補足すると，s3 は首を縦に振って肯定を示した。

⑤　「ｓ3 の解釈としては，瞬間の速さっていうのはどんどんどんどん，線が短くなっちゃって，最終的に，点になると．そういうイメージでいたわけね。ならこれが，こうあって，こっから，ここまでの話だと思ったんだね。じゃあなんできゅーって短くなんの？」と問いかけられると，s3 は「段々範囲になっている平均の速さの範囲がぎゅーってなっている」と答えた。「平均の速さの場合が？ここで言うところの範囲っていうのは？」と投げかけると，s3 は「2～3」と答えた．更に「2～3 ね，この範囲が？」と問われると,「狭まっている」と答えた。教師は「狭まっているんだね．どんどんどんどん，狭まっていってぎゅーって狭まって行く。そして最終的に，接線になったっていうことだね」と説明したので, s3 は瞬間の速さを点で捉えるのではなく，線で捉えると理解した。

⑥　「この接線はどうやって求めるの？」と問いかけられると，s2 は「$y - 4 =$・・・」と式を答えた。「傾きを？どうやって計算すんの？」と投げかけられると，s2 は「微分で計算」と答え，「微分で計算すんの？微分は今日は何をやるの？」と再度問われると「$\lim_{h \to 0}$で」と答えた。教師が黒板に「$f'(2)$」と板書して「これは別名なんていうの？」と投げかけられると，s2 は「傾き」「変化の割合」「平均変化率」と答えて最後に「微分係数？」と答えた。

教師は最後に「微分係数や接線の傾きは同じです。だからどんどんどんどん畳んでいって，接線になっちゃう。この幅がぎゅーっと狭まるから，接するしかないから接線なんですよーということです」という説明をしたので，生徒は「$f'(a)$」が微分係数であり接線の傾きであると理解した。

この理解過程では，生徒は瞬間の速さで必要となる極限の考えを用いることはできていたが，曲線上を動く点の動的な動きを一方向のみで考えていること，及び接線の傾きを求めるときに必要となる極限の考えを用いることができないという実態がみられた。これにより，数学Ⅱ「図形と方程式」で扱われる円の接線の求め方と数学Ⅱ「微分・積分の考え」で扱われる接線の求め方との差を理解しにくい生徒の様子が明らかになった。

「微分係数の図形的意味(接線)」の意味理解は,「瞬間の速さをグラフで表すとどのように表すことができるか」という教師の発問から「瞬間の速さが微分係数や接線の傾きと同じであり，接線の傾きが微分係数の図形的意味である」という意味を理解することである。そのような意味理解に到達するには，瞬間の速さの授業と関連付けて平均変化率や微分係数というものがグラフでどのように表されるのか考えさせる所から始め，なぜそうなるのかという意味を伴った活動をつないでいき,「微分係数の図形的意味(接線)」の意味理解に到達させるこ

とが必要である。

5.3. 面積と定積分の学習について

5.3.1. 面積と定積分の学習における極限の考え

面積と定積分は，「なぜ，定積分の計算で面積を求めることができるのか」という意味を理解する生徒の理解過程の考察を数研出版の高等学校数学Ⅱの教科書を用いて考察を行った。面積と定積分の意味理解には概ね，次のような手順を踏むことになると考えられる。

① $S(x)$を定義する。$S(x)$は面積であり，また，xの関数である。 ② $S'(x)=f(x)$を導く。 ③ $S(x)$を$f(x)$の不定積分$F(x)$を用いて表す。 ④ $S=S(b)=F(b)-F(a)$

②の理解が最も大きなポイントである。②の説明の方法として，多くの教科書で次の2 つの方法がとられている。東京書籍の数学Ⅱの指導書(p.246)を参考に，「$S'(x)=f(x)$を導く方法 1，2」として，次に示す。

「$S'^{(x)}=f(x)$を導く方法 1」は，図 4 において $S(x+h)-S(x)=hf(t)$ を導きこれを満たすtの存在を直観的に認めさせるものである。この方法では，極限の考えを用いる箇所「$h\to 0$のとき$t\to x$」において，位置がどこか定まらないtの値の変化と極限を考えなければならない。このことが，理解の困難性につながると考えられる。

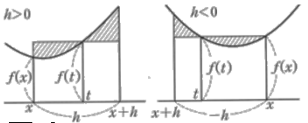


図 4:$S(x+h)-S(x)=hf(t)$を導く方法

「$S'(x)=f(x)$を導く方法 2」は，図 5 において最大値，最小値の存在定理を直観的に認めさせるものである。この方法では，極限の考えを用いる箇所「$h\to 0$のとき，$m\to f(x)$，$M\to f(x)$」において，位置がどこか定まらない最小値 mと最大値 Mの値の変化と極限を考えなければならない。このことが，理解の困難性につながると考えられる。後述する調査授業で使用した高等学校数学Ⅱ(数研出版，2012)では，上の 2 つの困難性を生じさせない工夫がなされている。その教科書を用いて生徒の理解過程を考察すると以下のように考えられる。

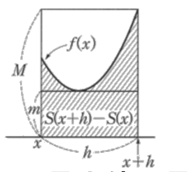
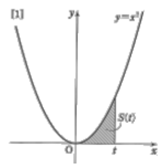
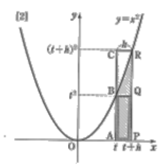


図 5．最大値と最小値で導く方法

表 6 教科書による説明に沿う生徒の理解過程

① (教科書の指示に従って) 定積分と図形の面積との関係を関数$y=x^2$で考えようとする。
② (教科書の指示に従って) 下図において関数$y=x^2$のグラフとx軸および直線$x=t$で囲まれた斜線部分の面積は，tの関数であることを確認し，この関数を$S(t)$とする。 
③ (教科書の指示に従って) $S'(t)=t^2$が成り立つことを示そうとする。
④ (教科書の指示に従って) $\frac{S(t+h)-S(t)}{h}$を考え，hを 0 に限りなく近づけることにする。
⑤ (教科書の指示に従って) $h>0$のとき，斜線部分の面積は$S(t+h)-S(t)$であることを右図において確認する。 
⑥ (教科書の指示に従って) 横の長さがhである 2 つの長方形 APQB，APRC の面積の大小関係を考えようとし， $ht^2<S(t+h)-S(t)<h(t+h)^2$

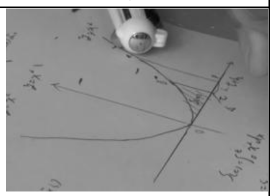
という不等式が成り立つことを導く。
⑦　(教科書の指示に従って)　　0であることから⑥の不等式の各辺をhで割り， という不等式を導く。
⑧　(教科書の指示に従って)　hを 0 に限りなく近づけると(t　　は限りなくt^2 に近づくことを確認する。h　0のときも同様であることも確認する。
⑨　よってこのとき，$\frac{S(t+h)-S(t)}{}$ も t　に限りなく近づくことになると確認する。
⑩　上で調べたことから， 　　　　すなわち であることを導く。

ここでは，なぜそうするのかという理由がわからないままに，それを考えることもなく，教科書の指示に従って説明を読み進めていくという受動的な学習となり，「0 とは異なる値をとりながら 0 に限りなく近づけていくとき・・・・・」というような「極限の考え」に迫ることもない，ごく表面的な理解に止まる生徒の理解過程を明らかになった。

5.3.2.　「面積と定積分」における調査授業の実践と分析

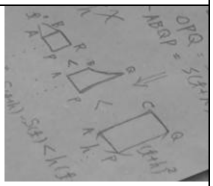
「面積」における調査授業の目的は，曲線を含む図形の面積が定積分の計算で求めることができることの意味理解を図る授業を行い，生徒の意味理解の過程を明らかにすることである。調査授業では，4.4 で先述した高等学校数学Ⅱ(数研出版，2012)の教科書にある「$S'(x)=f(x)$を導く方法 3」による説明を主として展開した。「なぜ積分することによって面積を求めることができるのか」という発問を生徒に投げかけることから始められた。以下の表 7 の①~⑩の番号は，表 6 の番号に対応させている。 s1，s2 などは生徒個人を表わしており，それ以外で生徒とだけ表記されている場合は生徒全員であることを表している。

表 7　面積と定積分における生徒の理解過程

①　1 学期の間に学習した積分についてプリントで復習を行った後,「どうして積分すると面積になるのかということを今日はやっていきます。関数$y=x^2$から考えてみよう」という教師の発言から，黒板の板書に従って関数　　のグラフをプリントに書いた。
 ②　右図のように，関数 x のグラフと直線 $=t$ および$x=t+h$を教師の指示に従ってプリントに書いた。関数$y=x^2$のグラフとx軸および直線　tで囲まれた面積を$S(t)$とした。教師が　　のグラフとx軸および直線　$+h$で囲まれた図形を指し，「ここの面積はどう表せるか」と聞きながら，グラフの横に$S(t+h)$と書いた。
③　(表 4 の③に該当する事項はない)
④　(表 4 の④に該当する事項はない)
⑤　②の図を指して「この ABQP の面積は，なんて表現できる？」という問いかけに「$S(h)$」と答えた。「多分ここ($S(t)$)とここ($S(t+h)$)で計算しちゃったのかもしれないけど，ちょっとここでは計算できないので，そのまま考えると？」という問いかけに，s3 は「$S(t+h)$引く$S(t)$」と答えた。s3 は教師とのやり取りから，ABQP の面積を求めるには　　(t)という文字式を用いて考えると理解し，生徒はプリントのグラフの横に

「$S(t+h)-S(t)$」と書いた。

⑥-1　図形 ABQP の面積を $S(t+h)-S(t)$ と表した後，「特殊な考え方をしていきます」「あ，ここ($y=x^2$のy座標)はなんぼ？」と聞かれたので，点 B と点 Q のy座標をそれぞれ「t^2」「$(t+h)^2$」と答えた。その後上図をプリントに書き，教師の説明を受けて，生徒は 2 つの長方形 ABRP と長方形 ACQP の間に図形 ABQP があると理解した。



⑥-2　「この(ABQP)の面積は出すのが難しいので長方形なら縦×横ででるよね」と聞かれたので，s4 と s5 は 2 つの長方形 ABRP と長方形 ACQP の面積をそれぞれ「ht^2」「$h(t+h)^2$」と答えた。

⑥-3　板書された図形 ABQP を指し示しながら「(ABQP の面積は)長方形 ABRP より大きいけど, 長方形 ACQP より小さいことになる」という教師の説明を受けて，図形と長方形の面積をそれぞれ確認した。生徒は⑤で表現した図形 ABQP の面積が

$$ht^2 < S(t+h)-S(t) < h(t+h)^2$$

という不等式で表されると理解し，⑥-1 の図の下にその不等式を書いた。

⑦　板書された不等式の中の h を指して「h っていう幅があります。h は 0 じゃありません。なので，全部 h で割ります」と指示されたので，生徒はそのまま⑥-3 の不等式をhで割り，

$$t^2 < \frac{S(t+h)-S(t)}{h} < (t+h)^2$$

を⑥-3 の不等式の下に書いた。

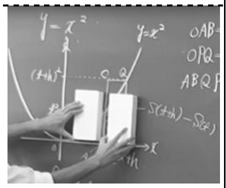
⑧-1　⑦の不等式の中辺を指して「これってどこかで見たことある？」という教師の問いかけに，s1 は「瞬間の速さ」「傾き」「微分係数」と答えた。更に教師から「何における微分係数？」と聞かれたので，s1 は「t における微分係数」と答えた。その後，教師は $\frac{S(t+h)-S(t)}{h}$の下に$S'(t)$と板書したので，生徒は図形 ABQP の面積は微分係数で表されることを理解した。

⑧-2　教師の説明を聞きながら，⑦の不等式の下に板書で示された

$$\lim_{h\to 0}(t^2) < \lim_{h\to 0}\frac{S(t+h)-S(t)}{h} < \lim_{h\to 0}(t+h)^2$$

を確認した。教師から「$\lim\limits_{h\to 0}$というのは h を 0 に近づけるということです」という説明を受けた。(注；ここでは≦であるが実際の板書はなかった)

⑧-3　「h を 0 に近づけると, えー微分係数というものが出てきちゃいます。h を 0 に近づけるっていうのは一体どういうことか」と聞かれ，その問いを確認した。その上で，教師は 2 つの長方形の発泡スチロールを右図のように近づけながら，「h は幅であり，0 に近づけていくと，面積が 0 に近づくが 0 にはならない」という教師の説明を受けた。ここでの教師の説明から，s1 は授業後のアンケートで「瞬間の速さのときの面積の集合体なので面積が求められる」という理解を示していた。



⑧-4　⑧-2 の不等式の左辺を指して，「h を 0 に限りなく近づけると，t^2は何になりますかね」と聞かれたので，s3 は「0」と答えた。教師の「0 にはならないよね。h を 0 に近づけるから，何も変化しません。これはt^2です」という説明を受けた。授業後のアンケートで s3 は「線は長方形なので，正確な値は存在しないが, それにとても近いものが求められる」という理解を示していた。

⑧-5　⑧-2 の不等式の中辺を指して，「これ

($\frac{S(t+h)-S(t)}{h}$)は何になる？」と聞かれたので，「微分係数」と答えた。教師から「$S'(t)$になりますよね」と説明を受けた。授業後のアンケートでs2は「細かい線で図形を描き，その線の面積を足し行けば求められる。その線をもとめる途中の最後の手順は微分されているので，積分して戻す」と回答しており，微分係数の授業との繋がりを感じていた。
⑧-6　⑧-2の不等式の右辺を指して，「hを0に限りなく近づけると，$(t+h)^2$は何になりますか」という教師の問いかけに，「t^2」と答えた。その後，教師の「t^2に近づいていくよね」という説明を受けた。このとき，生徒はhを限りなく0に近づけると，$(t+h)^2$のt^2に限りなく近づくことを確認した。
⑨　「t^2より大きくてt^2より小さい。これはいわゆる t^2 にだんだんと近づいていくということです」という教師の説明を受けて，$\frac{S(t+h)-S(t)}{h}$の式を見ながら，hを限りなく0に近づけるとき，これはt^2に限りなく近づくことを確認した。
⑩　「$S'(t)$は t^2 に近づく。$S'(t)$の微分を元に戻すにはどういう計算するのか？」という教師の問いかけにs2は「積分する」と答えた。教師は「積分しますよね．両辺積分すると，元に戻るけど，t^2はこう($\int t^2dt$)なります．だから積分すると，面積が出てくるんです」と説明した。このとき，生徒は積分すると面積を求めることができると気付いた。

この理解過程では，教師の問いかけや説明などとそれに伴う生徒の活動によって進められ，意味理解により近づいたものになっていることが認められる。意味理解という観点からみたとき，改善すべき最大のポイントは，面積の不等式から高さの不等式への視点の移行が，「教師の「全部hで割ります」という指示」(⑦についての記述の下線部)により進められたことである。ここの改善で考えられるのが，「hが限りなく0に近づくとき，面積の他に変化するものがないか？」という教師の問いかけにより，面積の極限から高さの極限へと視点を移行させる工夫などである。

「面積と定積分」の意味理解は，「定積分の計算で面積を求めることができる」という結果と共に，「なぜ，定積分の計算で面積を求めることができるのか」という意味を理解するということである。そのような意味理解に到達するには，定積分と面積の関係を考えようという始まり方ではなく，関数$y=x^2$のグラフを含む図形の面積をどのように求めたらよいかということから始め，なぜそうするのかという意味を伴った活動をつないでいき，「面積と定積分」の意味理解へと到達させるという指導が必要である。表7の調査授業には，その指導の可能性が具現されている。なぜそうするのかという意味を伴った活動をつなぐ教師の問いかけ，（考える準備としての）説明，働きかけを工夫すれば，特に理解過程⑦において面積の極限から高さの極限へと視点を移行させる教師の問いかけを工夫すれば，意味を伴った活動を切れ目なくつないでいき，「面積と定積分」の意味理解へと到達させることができると考える。

6.　まとめと今後の課題

本研究により，調査を行った「瞬間の速さ」・「微分係数の図形的意味(接線)」・「面積と定積分」の授業では，なぜそうするのかという意味を伴った活動を繋ぐ，教師の問いかけや(考える準備としての)説明，働きかけを工夫することでそれぞれの学習で意味理解へと到達させることができるとい

う指導への改善を示すことができた。また，「瞬間の速さ」で用いた極限の考えを「微分係数の図形的意味(接線)」の学習で用いることで，グラフに表すと点として捉えようとしていた「瞬間の速さ」を直線の傾きとして捉えることができるようになるという効果などを確認することもできた。意味理解を図る授業を通して，それぞれの学習内容は関連付けられ，学習の意味を考えながらより理解を深めていくことのできる授業を創る可能性をも示すことができたと言えよう。本研究の成果を出発点として，これからも一層，高等学校数学Ⅱ「微分・積分の考え」における極限の考えに着目した「微分すること」・「積分すること」の意味理解につながる指導を志向していかなければならない。

本稿において数学Ⅱ「微分・積分の考え」における極限の考えの理解過程に着目して，生徒の理解過程を考察してきたが，極限の考えを用いない，例えば曲線の概形などの学習においては明らかにすることができなかった。今後は，「瞬間の速さ」・「微分係数の図形的意味(接線)」・「面積と定積分」のという極限の考えに関わる学習だけではなく，数学Ⅱ「微分・積分の考え」全体を通して，「微分すること」・「積分すること」の意味理解を明らかにするために各学習の生徒の理解過程に着目し，数学Ⅱ「微分・積分の考え」の意味理解につながる指導改善の研究と実践を更に発展させていきたい。

7. 引用・参考文献

Boyer,C.B.(1949). The History of the Calculus and its Conceptual Development.New York:Dover.

Edwards, Jr.C.H. (1937). The Historical Development of the Calculus, NewYork: Springer-verlag.

片寄恵理奈．(2015).「数学Ⅱ「微分の考え」における極限に関する一考察-瞬間の速さの理解段階に着目して-」．日本数学教育学会第 48 回秋期研究大会発表集録．pp．275-278．

片寄恵理奈．(2015).「高等学校数学Ⅱ「微分の考え」における極限に関する一考察」．上越数学教育研究第 30 号．pp.85-92．

文部科学省．(2009)．高等学校学習指導要領解説　数学編．実教出版．

大田邦郎．(2009).「高等学校の積分指導におけるいくつかの問題」. 北海道大学大学院教育学研究院紀要 108．pp．21-29．

大塚明彦．(2009).「平均の速さから瞬間の速さへ」. 教育科学/数学教育. 1 月号. pp.60-64.

大島利雄他．(2013).『高等学校数学科用　数学Ⅱ』．数研出版．

坂井武司．(2015).「小・中の連続性に基づいた極限の考えの素地指導～学習内容の本質に迫る教材開発～」. 学校数学研究会誌　学校数学研究　Vol.23　No.1．pp.5-11．

高橋陽一郎他．(2013).『詳説数学Ⅱ』．啓林館．

高橋陽一郎他．(2013).『諸説数学Ⅲ』．啓林館．

塚原久美子. (2002).「数学史をどう教えるか」. 東洋書店．

山口昌広．(2014)．高等学校数学Ⅱにおける微分学習の指導改善に関する研究-微分することの意味理解に着目して-. 上越教育大学学校教育研究科修士論文(未公刊).